1 Variační počet

Trocha terminologie: jako jsme zobrazení z $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a později $\mathbb{R}^d$ (nebo jejich podmnožin) s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ nazývali funkce (reálné či komplexní), zobrazení z Banachových prostorů (případně jejich podmnožin) s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ nazýváme **funkcionály**. Později pak budeme zobrazaní mezi Banachovými prostory nazývat operátory.

Pro funkcionály s hodnotami v $\mathbb{R}$ můžeme definovat lokální i globální extrémy (volné, nebo vzhledem k množině) analogicky jako u funkcí.

1.1 Derivování v Banachových prostorech a jeho aplikace

Definice 1 (Gâteauxova a Fréchetova derivace)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ funkcionál, $a \in D_f$, $h \in X \setminus \{0\}$. Potom definujeme* ***Gâteauxovou derivaci*** *F v bodě a* ***ve směru*** *h jako*

$$D_h F(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a+th) - F(a)}{t},$$

pokud limita napravo existuje vlastní.

Spojitý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{R}$ budeme nazývat ***Gâteauxovou derivací*** *F v bodě a pokud $D_h F(a)$ existuje pro všechna $h \in X \setminus \{0\}$ a platí $L(h) = D_h F(a)$, $h \in X \setminus \{0\}$.*

Spojitý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{R}$ budeme nazývat ***Fréchetovou derivací*** *F v bodě a pokud*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Gâteauxovy a Fréchetovy derivace vyšších řádů definujeme induktivně.

Příklady.

1. *Pro funkcionál $\Phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definovaný jako $\Phi(f) = f(0)$ platí $D_h \Phi(f) = h(0) = \Phi(h)$.*
2. *Pro funkcionál $\Phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definovaný jako $\Phi(f) = \int_0^1 f$ platí $D_h \Phi(f) = \int_0^1 h = \Phi(h)$.*
3. *Pro funkcionál $\Phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definovaný jako $\Phi(f) = (f(0))^2$ platí $D_h \Phi(f) = 2f(0)h(0)$.*
4. *Pro funkcionál $\Phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definovaný jako $\Phi(f) = \int_0^1 f^2$ platí $D_h \Phi(f) = \int_0^1 2fh$.*

5. *Obecně, pro funkcionál* $\Phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ *ve tvaru* $\Phi(f) = \int_0^1 G(f)$*, kde* $G \in C^1([0,1])$ *platí*

$$D_h\Phi(f) = \int_0^1 G'(f)h, \quad D_{h,h}\Phi(f) = \int_0^1 G''(f)h^2.$$

Definice 2 (stacionární bod)**.** *Nechť* X *je normovaný lineární prostor,* $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ *funkcionál. Bod* $a \in D_f$ *nazveme* ***stacionárním*** *(nebo kritickým) bodem* F*, pokud* $D_hF(a) = 0$ *pro každé* $h \in X \setminus \{0\}$*.*

Poznámky a příklady. 1. *(Eulerova nutná podmínka) Nechť* X *je normovaný lineární prostor,* $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ *funkcionál a* F *má v* $a \in D_F$ *lokální extrém. Pokud pro* $h \in X \setminus \{0\}$ *exsituje* $D_hF(a)$*, potom* $D_hF(a) = 0$*.*

2. *(Lagrangeova nutná podmínka pro extrém) Nechť* X *je normovaný lineární prostor,* $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ *funkcionál a* F *má v* $a \in D_F$ *lokální minimum. Pokud pro* $h \in X \setminus \{0\}$ *exsituje* $D^2_{h,h}F(a)$*, potom* $D^2_{h,h}F(a) \geq 0$*.*

3. *(Lagrangeova postačující podmínka pro extrém) Nechť* X *je normovaný lineární prostor,* $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ *funkcionál a* $a \in D_F$ *je stacionárním bodem* F*. Pokud existuje* U *okolí* a*, že pro každé* $h \in X \setminus \{0\}$*a* $x \in U$ *existuje* $D^2_{h,h}F(x)$ *a platí* $D^2_{h,h}F(x) \geq 0$*, potom má* F *a bodě* a *lokální minimum.*

1.2 Funkcionály reprezentované integrálem

Jde o funkcionály ve tvaru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

definované na množině

$$M = \{y \in C^1([a,b]) :\ y(a) = A,\ y(b) = B\}, \tag{2}$$

kde $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$.

Tuto obecnou situaci si ovšem upravíme na speciální úlohu

$$\Phi(u) = F(u + \varphi),$$

kde $\varphi(x) = \dfrac{B - A}{b - a}(x - a) + A$, a

$$X = \{u \in C^1([a,b]) :\ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Je snadné si rozmyslet, že $u \in X$ právě tehdy, když $u + \varphi \in M$, a že $u \in X$ je extrémem funkcionálu Φ právě tehdy, když $u + \varphi$ je extrémem (stejného typu) funkcionálu F.

Výhodou této formulace je, že X je lineární prostor. Vybavíme-li ho normou

$$||u||_X = ||u||_\infty + ||u'||_\infty,$$

dostaneme normovaný lineární prostor (dokonce úplný, tedy Banachův).

Poznámky a příklady. *1. Například pro funkce $f(x,y,z)$ ve tvaru x^2z, $\sqrt{1+z^2}$ a $y\sqrt{1+z^2}$ bychom dostali funkcionáy F po řadě*

$$F(y)=\int_a^b x^2y,\quad F(y)=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\quad a\quad F(y)=\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}.$$

2. (výpočet $D_h\Phi$ a $D^2_{h,h}\Phi$) snadno spočítáme, že pro $U\in X$ a $h\in X\setminus\{0\}$ platí (při značení $y=u+\varphi$)

$$D_h\Phi(u)=\int_a^b f_y(x,y,y')h+f_z(x,y,y')h'\,dx$$

a

$$D^2_{h,h}\Phi(u)=\int_a^b f_{yy}(x,y,y')h^2+2f_{yz}(x,y,y')hh'+f_{zz}(x,y,y')(h')^2\,dx.$$

Lemma 3 (základní lemma variačního počtu)**.** *Nechť $f\in C([a,b])$. Potom*

1. *pokud platí*

$$\int_a^b fg'=0,\quad g\in C^1([a,b]),\ g(a)=g(b)=0,$$

potom f je konstantní na $[a,b]$,

2. *pokud platí*

$$\int_a^b fg=0,\quad g\in C^1([a,b]),\ g(a)=g(b)=0,$$

potom $f=0$ na $[a,b]$.

Věta 4 (Euler-Lagrangeova rovnice)**.** *Nechť $f\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^2)$ a y je stacionárním bodem funkcionálu F. Potom je funkce*

$$x\mapsto f_z(x,y(x),y'(x))$$

*spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ a platí (tzv. **Euler-Lagrangeova rovnice**)*

$$f_y(x,y(x),y'(x))-(f_z(x,y(x),y'(x)))'=0,\quad x\in[a,b].\tag{3}$$

Poznámky a příklady. *1. (regularita minimizéru) pokud je y stacionárním bodem F a pro nějaké $\xi\in(a,b)$ platí*

$$f_{zz}(\xi,y(\xi),y'(\xi))\neq 0.$$

Potom existuje $\delta>0$, že y je C^2 na okolí ξ.

2. (Lagrangeova nutná podmínka) pokud je y bodem minima funkcionálu F. Potom

$$f_{zz}(x,y(x),y'(x))\geq 0,\quad x\in[a,b].$$

3. *(Legendrova postačující podmínka) pokud je y stacionárním bodem funkcionálu F a pokud existují $\alpha, \delta > 0$, že*

$$D^2\Phi_{h,h}(u) \geq \alpha ||h||^2, \quad h \in X, \ ||h|| < \delta,$$

potom y je bodem minima.

4. *(Lagrangeova postačující podmínka) pokud je y stacionárním bodem funkcionálu F. Jestliže existuje $\delta > 0$, že pro každé $h \in X$, $||h|| < \delta$ splňuje funkce $\varphi : t \mapsto F(y + th)$ podmínku*

$$\varphi''(t) \geq 0, \quad t \in (0, 1).$$

Potom F má v bodě y lokální minimum.

Věta 5 (konvexita a extrém)**.** *Pokud je zobrazení $(u, v) \mapsto f(x, u, v)$ konvexní pro všechna $x \in [a, b]$ a $y \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F. Potom má F v bodě y minimum.*

Definice 6 (Jacobiho rovnice a konjugovaný bod)**.** *Nechť $f \in C^3([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F. Položme*

$$P(x) = f_{zz}(x, y(x), y'(x))$$

a

$$Q(x) = f_{yy}(x, y(x), y'(x)) - (f_{yz}(x, y(x), y'(x)))'.$$

Rovnici

$$-(Ph')' + Qh = 0$$

nazýváme ***Jacobiho rovnicí****. Bod $x \in (a, b]$ nazveme* ***konjugovaným bodem*** *k bodu a, pokud existuje netriviální řešení Jacobiho rovnice h, pro které platí $h(a) = h(x) = 0$.*

Věta 7 (Jacobiho)**.** *Nechť $f \in C^3([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F a platí*

$$f_{zz}(x, y(x), y'(x)) > 0, \quad x \in [a, b].$$

Potom

1. *pokud na $(a, b]$ neexistuje konjugovaný bod k bodu a, potom y je bodem lokálního minima funkcionálu F na M.*

2. *pokud je y bodem lokálního minima funkcionálu F na M, potom na (a, b) neexistuje konjugovaný bod k bodu a.*

Nutná podmínka pro autonomní úlohu: je-li $f(x, y, z) = g(y, z)$ a y stacionárním bodem F, potom existuje $C \in \mathbb{R}$, že

$$g(y, y') - y'g_z(y, y') = C.$$

Věta 8 (o Lagrangeových multiplikátorech)**.** *Nechť $f, g \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^2)$, $C \in \mathbb{R}$ a $y \in M$ je bodem minima funkcionálu F vzhledem k množině*

$$\{y \in M : G(y) = C\},$$

kde

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

(zde analogicky k Φ značíme $\Psi(u) = G(u+\varphi)$). Pokud $D\Phi(y) \neq 0$, potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$D\Phi(y)(h) = \lambda D\Psi(y)(h), \quad h \in X \setminus \{0\}.$$

Dále se podívali na nějaké aplikace variačního počtu ve fyzice: úlohu o brachystochroně a úlohu o zavěšeném řetězu.

Posloupnosti funkcí

Definice 9 (bodová a stejnoměrná konvergence)**.** *Pro posloupnost reálných funkcí $\{f_n\}$ definovaných na $A \subset \mathbb{R}^d$ a $f : A \to \mathbb{R}$ říkáme, že*

- *posloupnost $\{f_n\}$* ***konverguje bodově*** *k funkci f na množině A (značíme $f_n \to f$), pokud pro všechna $x \in A$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,*
- *posloupnost $\{f_n\}$* ***konverguje stejnoměrně*** *k funkci f na množině A (značíme $f_n \rightrightarrows f$), pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall x \in A\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Je-li A navíc otevřená, říkáme, že

- *posloupnost $\{f_n\}$* ***konverguje lokálně stejnoměrně*** *k funkci f na množině A (značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$), pokud pro každé $x \in A$ existuje $\delta > 0$, že $f_n \rightrightarrows f$ na $U(x,\delta)$.*

Poznámky a příklady.

1. *Bodovou konvergenci můžeme rovněž vyjádřit následujícím výrokem:*

$$\forall x \in A\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

oproti stejnoměrné konvergenci jsme prohodili pořadí kvantifikátorů.

2. *Kažadá stejnoměrně konvergentní posloupnost konverguje i bodově, obráceně to ovšem neplatí, stačí uvážit příklad $A = [-1, 1]$, $f_n(x) = x^n$.*
3. *Pro $\sigma_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ platí*

$$(f_n \rightrightarrows f \quad \text{na } A\ ) \iff \sigma_n \to 0.$$

4. *Stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce.*

5. *Pro* $f_n \in C([a,b])$ *a obvyklou maximovou normu* $||g|| = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$ *na* $C([a,b])$ *platí*

$$(f_n \rightrightarrows f) \iff (||f_n - f|| \to 0).$$

6. *Pro stejnoměrnou konvergenci můžeme rovněž formulovat Bolzano-Cauchyovu podmínku, platí*

$$(f_n \rightrightarrows f) \iff (\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall x \in A\, \forall m,n \in \mathbb{N},\, m,n \geq N : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

7. *(Moore-Osgoodova věta) Nechť* $\{f_n\}$ *je posloupnost reálných funkcí definovaných na* $P(a,\varepsilon)$ *a* $f : P(a,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $P(a,\varepsilon)$*. Pokud* $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ *existuje vlastní pro každé* $n \in \mathbb{N}$*, potom existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *a platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x) \right),$$

(speciálně, limita napravo existuje).

8. *Analogicky k posloupnostem definujeme i bodovou a stejnoměrnou konvergenci řad funkcí. Označíme-li* $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$*, pak říkáme, že řada* $\sum_{k=1}^{\infty}$ *konverguje bodově. resp. stejnomětně k funkci (součtu)* $s : A \to \mathbb{R}$*, pokud* $s_n \to s$*, resp.* $s_n \rightrightarrows s$*.*

9. *(nutná podmínka stejnoměrné konvergence řad) Pokud řada* $\sum f_n$ *konverguje stejnoměrně, potom* $f_n \rightrightarrows 0$*.*

10. *(Weierstrassův M-test) Nechť* $\{f_n\}$ *je posloupnost funkcí dfinovaných na* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *a* $\{a_n\}$ *je posloupnost nezáporných reálných čísel. Předpokládejme navíc, že*
    - $|f_n(x)| \leq a_n,\ x \in A,\ n \in \mathbb{N}$,
    - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

    Potom řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvrguje stejnoměrně (na* A*).*

11. *pomocí výše uvedeného kritéria například snadno dostaneme stejnoměrnou konvergenci řad* $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ *a* $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$

Definice 10 (stejná omezenost a monotonie)**.** *Nechť* $\{f_k\}$ *je posloupnost (reálných, či komplexních) funkcí definovaných na* $A \subset \mathbb{R}^d$*. Potom říkáme, že posloupnost* $\{f_k\}$ *je*

1. ***stejně omezená***, *pokud existje* $K \in \mathbb{R}$, *že*

$$|f_n(x)| \leq K, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in A,$$

2. ***monotónní***, *pokud platí* $a_n \leq a_{n+1}$ *na* A, $n \in \mathbb{N}$, *nebo* $a_n \geq a_{n+1}$ *na* A, $n \in \mathbb{N}$.

Věta 11 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je monotónní posloupnost reálných funkcí definovaných na* $A \subset \mathbb{R}^d$. *Nechť navíc* $\{b_n\}$ *je posloupnost (reálných, či komplexních) funkcí definovaných na* $A \subset \mathbb{R}^d$.

Pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *(Dirichlet)* $a_n \rightrightarrows 0$ *a posloupnost částečných součtů řady* $\sum b_n$ *je stejně omezená (obojí na* A*),*
- *(Abel)* $\{a_n\}$ *je stejně omezená a* $\sum b_n$ *konverguje stejnoměrně (obojí na* A*),*

potom řada $\sum a_n b_n$ *konverguje stejnoměrně (na* A*).*

Poznámky a příklady. 1. *Pro* $\delta > 0$ *platí, že řady* $\sum \sin nx$ *a* $\sum \cos nx$ *mají stejně omezené posloupnosti částečných součtů na* $[\delta, 2\pi - \delta]$. *Například tedy řady* $\sum \frac{\sin nx}{n}$ *a* $\sum \frac{\sin nx}{n}$ *konvergují stejnomětně na* $[\delta, 2\pi - \delta]$ *podle Dirichletova kritéria.*

2. *Abelovo kritérium dává snadný důkaz Abelovy věty z minulého semestru.*

Hlubší důsledky stejnoměrné konvergence

Nejdříve jsme učinili následující pozorování: nechť $\{f_n\} \subset C([a,b])$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$, potom $(R)\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n$.

Věta 12 (stejnoměrná konvergence derivací)**.** *Nechť* $\{f_n\}$ *je posloupnost reálných funkcí definovaných na omezeném intervalu* (a,b) *a nechť platí*

- $f_n'(x)$ *existuje vlastní pro všechna* $x \in (a,b)$ *a* $n \in \mathbb{N}$,
- *posloupnost* $\{f_n'\}$ *konverguje stejnoměrně (k nějaké funkci* f*),*
- *existuje* $x_0 \in (a,b)$, *že posloupnost* $\{f_n(x_0)\}$ *konverguje.*

Potom existuje $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, *která má vlastní derivaci na* (a,b) *a platí* $f_n \rightrightarrows F$ *a* $F' = f$ *na* (a,b).

Jako důsledek jsme dostali následující: nechť $\{f_n\} \subset \mathcal{N}([a,b])$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$. Potom $(N)\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} (N)\int_a^b f_n$.

Poznámky a příklady. 1. *Předchozí větu můžeme rovněž zformulovat v řeči řad funkcí, případně primitivních funkcí.*

Věta 13 (Dini). *Nechť* $\{f_n\} \subset C([a,b])$, $f \in C([a,b])$ *a nechť dále platí*

- $f_n \to f$ *an* $[a,b]$,
- $\{f_n\}$ *je monotónní na* $[a,b]$.

Potom $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$.

2 Lebesgueův integrál a základy teorie míry

2.1 Lebesgueův integrál

Definice 14 (intervaly v $\mathbb{R}^d$). ***Intervalem*** *v* $\mathbb{R}^d$ *nazveme množinu tvaru*

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_d, b_d],$$

uzavřeným intervalem *v* $\mathbb{R}^d$ *nazveme množinu tvaru*

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

otevřeným intervalem *v* $\mathbb{R}^d$ *nazveme množinu tvaru*

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d).$$

Objem intervalu *I (případně uzavřeného, či otevřeného intervalu) definujeme jako*

$$\mathrm{Vol}_d(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d) = \prod_{n=1}^{d} (b_n - a_n).$$

Definice 15 (dělení intervalu v $\mathbb{R}^d$). ***Dělením intervalu*** $I \subset \mathbb{R}^d$ *nazveme libovolný konečný systém po dvou disjunktních intrvalů* $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}^d$, *že*

$$I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k.$$

Definice 16 (nulová množina v $\mathbb{R}^d$). *Množinu* $A \subset \mathbb{R}^d$ *nazveme* ***nulovou,*** *pokud pro každé* $\varepsilon > 0$ *existují intervaly* $I_n \subset \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *že*

$$I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_d(I_n) < \varepsilon.$$

Poznámky a příklady.

1. *Každá konečná, či obecněji spočetná, množina je nulová. Množina* $\{a\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ *je rovněž nulová. Neprázdná otevřená množina naní nikdy nulová.*
2. *Existují i nespočetné nulové podmnožiny* $\mathbb{R}$ *- Cantorova množina.*
3. *Spočetné sjednocení nulových množin je nulová množina.*

4. *(pro zajímavost) Pro omezenou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí*

$$f \in \mathfrak{R}([a,b]) \iff \text{množina bodů nespojitosti } f \text{ je nulová.}$$

5. *(důležitá) U mnoha vztahů funkcí (například $f = g$, nebo $f < g$) budeme říkad, že platí **skoro všude** pokud existuje množina míry 0, že daná vlastnost platí všude mimo tuto množinu. Například předchozí poznámku bychom mohli zformulovat jako*

$$f \in \mathfrak{R}([a,b]) \iff f \text{ je spojitá skoro všude.}$$

Definice 17 (schodovité funkce a jejich integrál). *Funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme **schodovitou**, pokud exsituje interval $I \subset \mathbb{R}^d$, jeho dělení $I_1, \dots, I_n$ a $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, že*

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}.$$

Prostor všech schodovitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ budeme značit H_d. Pro $f \in H_d$ definujeme její integrál jako

$$\int f = \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{Vol}_d(A_k).$$

Poznámky a příklady. 1. *H_d je vektorový prostor. Navíc pro $f, g \in H_d$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí*

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

2. *Pro $f, g \in H_d$, $f \le g$, platí $\displaystyle\int f \le \int g$.*

3. *Pro $f, g \in H_d$ platí $\max(f,g), \min(f,g), f^+, f^-, |f| \in H_d$ a*

$$\left| \int f \right| \le \int |f|.$$

Lemma 18 (konvergence schodovitých funkcí). *Je-li $\{f_n\} \subset H_d$ monotónní posloupnost splňující $f \to 0$ na $\mathbb{R}^d$, potom $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n = 0$.*

Lemma 19 (konvergence schodovitých funkcí skoro všude). *Je-li $\{f_n\} \subset H_d$ monotónní posloupnost splňující $f \to 0$ s.v. na $\mathbb{R}^d$, potom $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n = 0$.*

Lemma 20 (korektnost definice Lebesgueova integrálu). *Nechť $\{f_n\}.\{g_n\} \subset H_d$ jsou monotónní posloupnosti, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $f_n \to f$ s.v. a $g_n \to g$ s.v., potom*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n.$$

Definice 21 (měřitelné a Lebesgueovsky integrovatelné funkce). *Nezápornou funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme*

- ***měřitelnou**, pokud existuje neklesající posloupnost nezáporných shodovitých funkcí $\{f_n\}$, že $f_n \to f$ s.v.,*
- ***Lebesgueovsky integrovatelnou**, pokud existuje neklesající posloupnost nezáporných shodovitých funkcí $\{f_n\}$, že $f_n \to f$ s.v., a $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n < \infty$. Pro takovou funkci pak definujeme **Lebesgueův integrál** z f jako*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Prostor všech nezáporných měřitelných funkcí na $\mathbb{R}^d$ označujeme $\mathcal{M}_d^+$, prostor všech nezáporných Lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^d$ označujeme $\mathcal{L}_d^+$ Funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme

- ***měřitelnou**, pokud $f^-, f^+ \in \mathcal{M}_d^+$,*
- ***Lebesgueovsky integrovatelnou**, pokud $f^-, f^+ \in \mathcal{L}_d^+$. Pro takovou funkci pak definujeme **Lebesgueův integrál** z f jako*

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Definice 22 (měřitelné a Lebesgueovsky integrovatelné funkce). *Nezápornou funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme*

- ***měřitelnou**, pokud existuje neklesající posloupnost nezáporných shodovitých funkcí $\{f_n\}$, že $f_n \to f$ s.v.,*
- ***Lebesgueovsky integrovatelnou**, pokud existuje neklesající posloupnost nezáporných shodovitých funkcí $\{f_n\}$, že $f_n \to f$ s.v., a $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n < \infty$. Pro takovou funkci pak definujeme **Lebesgueův integrál** z f jako*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Prostor všech nezáporných měřitelných funkcí na $\mathbb{R}^d$ označujeme $\mathcal{M}_d^+$, prostor všech nezáporných Lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^d$ označujeme $\mathcal{L}_d^+$ Funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme

- ***měřitelnou**, pokud existují $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_d^+$, že $f = f_1 - f_2$,*
- ***Lebesgueovsky integrovatelnou**, pokud existují $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_d^+$, že $f = f_1 - f_2$, přičemž definujeme **Lebesgueův integrál** z f jako*

$$\int f = \int f_1 - \int f_2.$$

Poznámky a příklady. *1. pokud $f \in X$ ($X = \mathcal{M}_d$, $\mathcal{M}_d^+$, $\mathcal{L}_d$, nebo $\mathcal{L}^+d$) a $g = f$ s.v., potom $g \in X$. Pokud $X = \mathcal{L}_d, \mathcal{L}_d^+$, potom $\int g = \int f$.*

2. *(vlastnosti $\mathcal{L}^+$) Nechť $f, g \in \mathcal{L}^+$, $\alpha, \beta \geq 0$, potom:*

   (a) *je-li $f \leq g$ s.v. potom $\displaystyle\int f \leq \int g$.*

   (b) $\max(f,g), \min(f,g), \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^+$.

3. *(vlastnosti $\mathcal{L}$) Nechť $f, g \in \mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, potom:*

   (a) *je-li $f \leq g$ s.v. potom $\displaystyle\int f \leq \int g$.*

   (b) $\max(f,g), \min(f,g), \alpha f + \beta g, |f| \in \mathcal{L}$. *navíc*

$$\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g \quad a \quad \left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

Lemma 23 (Leviho věta v $\mathcal{L}^+$)**.** *Nechť pro posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^+$ platí $f_n \nearrow f$ s.v. a nechť existuje $M \in \mathbb{R}$, že $\int f_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Poznámky a příklady. *1. Leviho větu snadno zobecníme pro $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_d$*

2. *V početní praxi je užitečná následující verze pro řady: nechť $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_d$ je posloupnost nezáporných funkcí a nechť $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} f_n < \infty$. Potom $\displaystyle f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}_d$ a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n = \int f.$$

3. *Leviho věta platí rovněž pro $\mathcal{M}_d$, pokud připustíme funkce s nevlastními hodnotami.*

4. *pro $\{f_n\} \subset \mathcal{M}_d$ rovněž platí $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_d$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_d$ (opět, pokud připustíme funkce s nevlastními hodnotami).*

Věta 24 (Lebesgueova o majorantě)**.** *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathcal{L}_n$, $f_n \to f$ s.v. a existuje $g \in \mathcal{L}_n$, že $|f_n| \leq g$ s.v., $n \in \mathbb{N}$. Potom $f \in \mathcal{L}_n$ a*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Základy teorie míry

Lebesgueův integrál snadno rozšíříme na některé měřitelné (ale ne nutně integrovatelné funkce). Pokud $f \in \mathcal{M}_d^+ \setminus \mathcal{L}_d^+$, potom definujeme $\int f = \infty$, pokud $f = f_1 - f_2$, pro $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_d^+$, potom definujeme $\int f = \int f_1 - \int f_2$, má-li pravá strana smysl. Prostor všech funkcí, pro které je Lebesgueův integrál definován po tomto rozšíření budeme značit $\mathcal{L}_d^*$ (zjevně platí $\mathcal{L}_d \subsetneq \mathcal{L}_d^*$).

Definice 25 (měřitelná množina a Lebesgueova míra)**.** *Množinu $A \subseteq \mathbb{R}^d$ nazveme **měřitelnou**, pokud $\chi_A \in \mathcal{M}_d$. Systém všech měřitelných podmnožin $\mathbb{R}^d$ budeme značit Λ_d.*

***Lebesgueovu míru** množiny $A \in \Lambda_d$ pak definujeme jako $\lambda_d(A) = \displaystyle\int \chi_A$.*

Poznámky a příklady. *1. Každý interval v $\mathbb{R}^d$ je měřitelná množina, jednobodová množina je měřitelná, uzavřené i otevřené množiny jsou měřitelné.*

2. Sjednocení a průnik a doplněk měřitelných množin je měřitelná množina.

3. Pro $\{A_n\} \subset \Lambda_d$ platí $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Lambda_d$.

4. $\lambda_d(I) = \mathrm{Vol}_d(I)$ (Lebesgueovu míru interpretujeme jako velikost - plochu, objem - množiny), otevřené a uzavřené množiny patří do $\mathcal{L}_d$.

5. Pro $\{A_n\} \subset \Lambda_d$ po dvou disjunktní platí $\lambda_d(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(A_m)$.

Definice 26 (σ-algebra a míra)**.** *Je-li Σ systém podmnožin množiny X, nazveme jej σ-**algebrou**, pokud platí*

1. $\varnothing, X \in \Sigma$,

2. $A, B \in \Sigma$, potom $A \setminus B \in \Sigma$,

3. $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, potom $\bigcup A_n \in \Sigma$.

*Dvojici (X, Σ) nazýváme **měřitelným prostorem**. Zobrazení $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ nazveme **mírou**, pokud platí*

1. $\mu(\varnothing) = 0$,

2. jsou-li $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní, potom $\mu\left(\bigcup A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

*Trojici (X, Σ, μ) nazýváme **prostor s mírou**.*

Poznámky a příklady. *1. $(\mathbb{R}^d, \Lambda_d, \lambda_d)$ je prostor s mírou,*

2. $\{\varnothing, X\}$ je vždy (tzv. triviální) σ-algebra, $\mathcal{P}(X)$ (množina všech podmnožin X, tzv. potenční množina) je vždy σ-algebra

3. $(X, \mathcal{P}(X), \delta_a)$ a $(X, \mathcal{P}(X), \mathcal{H}^0)$ jsou prostory s mírou. Zde

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, 0, \quad a \notin A \end{cases}$$

a $\mathcal{H}^0(A)$ je počet prvků A (tzv. počítací míra).

4. každá σ-algebra je uzavřená na spočetné průniky, tj. pokud $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, potom $\bigcap A_n \in \Sigma$,

5. pro (X, Σ, μ) prostor s mírou a $A, B \in \Sigma$, položme $\mu|_A(B) = \mu(A \cap B)$. Potom $(X, \Sigma, \mu|_A)$ je prostor s mírou. Například $\lambda_1|_{[0,1]}$ je míra na Λ_1 pro kterou platí $\lambda_1|_{[0,1]}(\mathbb{R}) = 1 < \infty$, je to tzv. konečná . Oproti tomu $\lambda_1(\mathbb{R}) = \infty$.

6. pro $f \in \mathcal{L}^*$, $f \geq 0$ s.v. a $A \in \Lambda_d$ definujeme $\mu_f(A) = \int f\chi_A$ (míra s hustotou f). V takovém případě je $(\mathbb{R}^d, \Lambda_d, \mu_f)$ prostor s mírou a platí

$$\lambda_d(A) = 0 \implies \mu_f(A) = 0,$$

(μ_d je tzv. absolutně spojitá vzhledem k λ_d).

7. (borelovská σ-algebra) Nejmenší σ-algebra obsahující otevřené (uzavřené) množiny.

8. (integrál vzhledem k obecné míře) Je-li (X, Σ, μ) prostor s mírou, definujeme (pro funkce $f : X \to \mathbb{R}$) jejich integrál vzhledem k μ následovně:

   - nejdříve definujeme tzv. jednoduché funkce $\sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{A_n}$, kde $A_1, \ldots, A_N \in \Sigma$ a $c_1, \ldots, c_N \geq 0$. Integrál z jednoduchých funkcí definujeme jako $\sum_{n=1}^{N} c_n \mu(A_n)$.
   - měřitelné funkce definujeme jako:

     $$f \text{ měřitelná} \iff \forall t \in \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, t)) \in \Sigma$$

   - pro nezáporné měřitelné funkce definujeme

     $$\int f = \sup \left\{ \int s : \quad 0 \leq s \leq f \text{ s.v. } s \text{ jednoduchá} \right\}$$

     pro obecné f pak $\int f = \int f^+ - \int f^-$, pokud má pravá strana smysl.

9. Je-li $f \in \mathcal{M}_d$, potom pro $t \in \mathbb{R}$ platí $f^{-1}((-\infty, t)) \in \Lambda_d$.

2.2 Výpočet Lebesgueova integrálu

Lemma 27 (subaditivita Lebesgueovy míry)**.** *Je-li $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost množin z Λ_d, potom*

$$\lambda_d\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_d\left(A_n\right).$$

Lemma 28 (o nulovosti integrálu)**.** *Je-li $f \in \mathcal{M}_d$, $f \geq 0$ s.v. a $\int f = 0$, potom $f = 0$ s.v.*

Pro $f \in \mathcal{L}_d^*$ a $A \in \Lambda_d$ definujeme integrál z f přes množinu A jako

$$\int_A f = \int f \cdot \chi_A.$$

Obdobně můžeme tento integrál definovat pro každou funkci f, pro kterou platí $A \subseteq D_f$ (zde f nejprve rozšíříme nulou na $\mathbb{R}^e \setminus D_f$ a předpokádáme, že v $\mathcal{L}_d^*$ leží toto rozšíření). Množinu všech funkcí pro které je $\int_A f$ konečný značíme $\mathcal{L}(A)$, množinu všech funkcí, pro které je $\int_A f$ definovaný označíme $\mathcal{L}^*(A)$. Funkci f nazveme měřitelnou na A, pokud existuje $f \in \mathcal{M}_d$, že $f|_A = g|_A$.

Věta 29 (vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu)**.** *Pokud $f \in \mathfrak{R}([a,b])$, potom $f \in \mathcal{L}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Věta 30 (Fubini)**.** *Nechť $f \in \mathcal{L}_{d+m}^*$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $y \in \mathbb{R}^m$ položme*

$$F(y) = \int f(\cdot, y) \quad a \quad G(x) = \int f(x, \cdot).$$

potom (po případném doredinování na nulové množině) $F \in \mathcal{L}_m^*$, $G \in \mathcal{L}_d^*$ a platí

$$\int f = \int F = \int G.$$

Věta 31 (o substituci)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ je regulární. Nechť navíc $A \subset \varphi(U)$ je měřitelná $f \in \mathcal{L}^*(A)$, potom pro platí*

$$\int_A f = \int_{\varphi^{-1}(A)} |J_\varphi| f \circ \varphi.$$

Pro $A \in \Lambda_d$ nazveme funkci $f : A \to \mathbb{R}$ měřitelnou, pokud má měřitelné rozšíření na $\mathbb{R}^d$. Prostor všech funkcí měřitelných na A budeme značit $\mathcal{M}(A)$.

Věta 32 (o limitě integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, $p \in I$, $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : I \times A \to \mathbb{R}$. Předpokládejme navíc, že*

- *funkce $x \mapsto f(t,x)$, $x \in A$, je měřitelná pro všechna $t \in I \setminus \{p\}$*

- *limita* $\lim_{t\to p} f(p,x) =: F(x)$ *existuje pro s.v.* $x \in A$,
- *existuje* $g \in \mathcal{L}(A)$, *že* $|f(p,x)| \le g(x)$ *pro s.v.* $x \in A$ *a všechna* $t \in P$.

Potom $F \in \mathcal{L}(A)$ *a platí*

$$\lim_{t\to p} \int_A f(t,x)\,dx = \int_A F$$

Poznámky a příklady. *1. Věta platí i pro jednostranné limity. Předpoklady navíc stačí ověřit jen lokálně.*

2. Funkce

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\,dx$$

je spojitá na $(0,\infty)$

3. Věta má i variantu pro spojitost: Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ *je otevřený interval,* $p \in I$, $A \subset \mathbb{R}^d$ *měřitelná a* $f : I \times A \to \mathbb{R}$. *Předpokládejme navíc, že*

- *funkce* $x \mapsto f(t,x)$, $x \in A$, *je měřitelná pro všechna* $t \in I$,
- *funkce* $t \mapsto f(t,x)$ *je spojitá v* p *pro s.v.* $x \in A$,
- *existuje* $g \in \mathcal{L}(A)$, *že* $|f(t,x)| \le g(x)$ *pro s.v.* $x \in A$ *a všechna* $t \in I$.

Potom je funkce $t \mapsto \int f(t,x)\,dx$ *spojitá v bodě* p.

4. Rovněž existuje i varianta využívající Leviho větu místo Lebesgueovy.

Věta 33 (o derivaci integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť* $I \subseteq \mathbb{R}$ *je otevřený interval,* $p \in I$, $A \subset \mathbb{R}^d$ *měřitelná a* $f : I \times A \to \mathbb{R}$. *Předpokládejme navíc, že*

- *funkce* $x \mapsto f(t,x)$, $x \in A$, *je měřitelná pro všechna* $t \in I$,
- *existuje* $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ *pro všechna* $t \in I$ *a s.v.* $x \in A$,
- *existuje* $g \in \mathcal{L}(A)$, *že* $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \le g(x)$ *pro s.v.* $x \in A$ *a všechna* $t \in P$,
- *existuje* $p \in I$, *že funkce* $x \mapsto f(p,x)$, $x \in A$, *leží v* $\mathcal{L}(A)$.

Potom je funkce $F : t \mapsto \int f(t,x)\,dx$ *definována na* I, *má tam vlastní derivaci a pro* $t \in I$ *platí*

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx.$$

Poznámky a příklady. *1.* $\Gamma^{(n)} = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \log^n x\,dx$,

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-tx}-1}{xe^x}\,dx = -\log(t+1)$.